

Tentamen Calculus 1

5 november 2012, 14.00-17.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit negen opgaven waarvoor in het totaal negen punten te behalen zijn. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van aantekeningen, boeken, en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

1. (a) Formuleer het principe van volledige inductie (Mathematical Induction).
(b) Bewijs dat

$$13^n - 6^n$$

deelbaar is door 7, voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$.

2. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan

$$e^z = -1 - i$$

3. (a) Een functie $f(x)$ is gedefinieerd op een interval (a, ∞) . Geef de precieze definitie van

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

- (b) Bewijs m.b.v. deze definitie dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

- (c) Idem,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

4. De functie f voldoet aan

- f is continu op het gesloten interval $[a, b]$
- f is differentieerbaar op het open interval (a, b)

- (a) Formuleer de middelwaardstelling (Mean Value Theorem).
(b) Neem aan dat er twee getallen m en M bestaan zodanig dat $m \leq f'(x) \leq M$ voor alle $x \in (a, b)$ Bewijs m.b.v. de middelwaardstelling dat

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

- (c) Toon (m.b.v. onderdeel (b)) aan dat voor alle reële a en b geldt:

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$$

